

# Géométrie des surfaces algébriques et points entiers

Pascal Autissier

2 février 2008

**Abstract :** Let  $X$  be a projective normal surface over a number field  $K$ . Let  $H$  be the sum of four properly intersecting ample effective divisors on  $X$ . We show that any set of  $S$ -integral points in  $X - H$  is not Zariski dense.

*2000 Mathematics Subject Classification :* 11G35, 14G05, 14G25.

## 1 Introduction

On s'intéresse ici aux solutions à coordonnées quasi-entières de systèmes d'équations polynomiales à coefficients dans un corps de nombres, dans l'esprit de la conjecture de Lang et Vojta (*cf* conjecture 4.2 de [6] p. 223).

Plus précisément, soient  $K$  un corps de nombres et  $S$  un ensemble fini de places de  $K$ . On montre le résultat suivant :

**Théorème 1.1 :** *Soit  $X$  une surface normale projective sur  $K$ . Soient  $D_1; D_2; D_3; D_4$  quatre diviseurs effectifs amples sur  $X$  qui se coupent proprement. Posons  $Y = X - D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ . Soit  $\mathcal{E} \subset Y(K)$  un ensemble  $S$ -entier sur  $Y$ . Alors  $\mathcal{E}$  n'est pas Zariski-dense dans  $Y$ .*

Cet énoncé était connu de Vojta pour  $X$  lisse vérifiant  $\rho \leq g + 1$ , où  $\rho$  désigne le nombre de Picard de  $X_{\overline{K}}$  et  $g = h^1(X; \mathcal{O}_X)$  (*cf* corollaire 0.3 de [12]). En fait, Vojta a besoin de  $\rho + 3 - g$  diviseurs au lieu de 4. L'intérêt de notre résultat réside donc dans l'uniformité en le nombre de diviseurs à considérer.

Remarquons que le théorème 1.1 s'inscrit bien dans le cadre de la conjecture de Lang et Vojta, puisque si  $X$  est lisse sur  $K$  de diviseur canonique  $\mathcal{K}_X$ , alors  $\mathcal{K}_X + D_1 + D_2 + D_3 + D_4$  est ample sur  $X$  (*cf* exemple 1.5.35 de [7] p. 87).

La démonstration repose sur une légère extension d'un théorème de Corvaja et Zannier [1] (*cf* théorème 3.2), qui donne des conditions géométriques de non-Zariski-densité des points  $S$ -entiers, et sur un bon choix de multiplicités associées aux diviseurs  $D_i$  (*cf* proposition 2.3).

On utilise en particulier le théorème du sous-espace de Schmidt (*cf* [9] §VI) et Schlickewei (*cf* [8]).

Je remercie Antoine Chambert-Loir pour l'inspiration qu'il m'a procurée.

## 2 Géométrie

Soit  $K$  un corps de caractéristique nulle.

**Conventions :** On appelle variété sur  $K$  tout schéma intègre, quasi-projectif et géométriquement irréductible sur  $K$ . Une surface sur  $K$  est une variété sur  $K$  de dimension 2. Le mot “diviseur” sous-entend “diviseur de Cartier”.

Soit  $X$  une variété projective sur  $K$  de dimension  $d \geq 1$ . Lorsque  $L_1; \dots; L_d$  sont des diviseurs sur  $X$ , on désigne par  $\langle L_1 \cdots L_d \rangle$  leur nombre d'intersection.

Soient  $L$  un diviseur ample sur  $X$  et  $E$  un diviseur effectif non nul sur  $X$ . La formule de Hirzebruch-Riemann-Roch donne l'estimation  $h^0(X; nL) = \frac{\langle L^d \rangle}{d!} n^d + O(n^{d-1})$ . Ceci motive la définition suivante :

Pour tout entier  $n \geq 1$ , posons d'abord  $S_n = \sum_{k \geq 1} h^0(X; nL - kE)$ ; remarquons que cette somme est finie puisque  $h^0(X; nL - kE) = 0$  si  $k > \langle L^d \rangle n / \langle L^{d-1} E \rangle$ .

**Définition :** On pose  $\nu(L; E) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{h^0(X; nL)n} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{d! S_n}{\langle L^d \rangle n^{d+1}}$ .

**Exemple :** Si  $X$  est une courbe, alors on peut aisément expliciter cette constante; on trouve  $\nu(L; E) = \frac{\langle L \rangle}{2\langle E \rangle}$ .

On aura besoin dans la suite de minorer  $\nu(L; E)$ . Commençons par une variante des “inégalités de Morse holomorphes” (cf [2] §12) :

**Lemme 2.1 :** Soit  $X$  une surface projective sur  $K$ . Soient  $L$  et  $M$  des diviseurs amples sur  $X$ . Posons  $\alpha = \langle LM \rangle / \langle M^2 \rangle$ . Soient  $n$  et  $k$  des entiers vérifiant  $1 \leq k \leq \alpha n$ . On a alors la minoration

$$h^0(X; nL - kM) \geq \langle L^2 \rangle \frac{n^2}{2} - \langle LM \rangle nk + \langle M^2 \rangle \frac{k^2}{2} - O(n) \quad ,$$

où le  $O$  ne dépend que de  $(K; X; L; M)$ .

*Démonstration :* On choisit un entier  $b \geq 1$  tel que  $bM$  soit très ample. D'après le théorème de Bertini, il existe  $s \in \Gamma(X; bM) - \{0\}$  tel que  $C = \text{div}(s)$  soit géométriquement irréductible sur  $K$ .

Soit  $i$  un entier tel que  $0 \leq i \leq \alpha n$ . On a la suite exacte de  $\mathcal{O}_X$ -modules suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(nL - (i + b)M) \rightarrow \mathcal{O}_X(nL - iM) \rightarrow \mathcal{O}_X(nL - iM)|_C \rightarrow 0 \quad .$$

On en déduit une suite exacte en cohomologie qui donne l'inégalité

$$h^0(X; nL - (i + b)M) \geq h^0(X; nL - iM) - h^0(C; (nL - iM)|_C) \quad .$$

En utilisant la majoration  $h^0(C; L'|_C) \leq \langle L'C \rangle + 1$  valable pour tout diviseur  $L'$  tel que  $\langle L'C \rangle \geq 0$  (cf proposition 3 (3) de [4] p. 192), on obtient

$$h^0(X; nL - (i + b)M) \geq h^0(X; nL - iM) - \langle LM \rangle bn + \langle M^2 \rangle bi - 1 \quad .$$

Maintenant, écrivons  $k$  sous la forme  $k = bq + r$  avec  $q \geq 0$  et  $0 \leq r < b$ . En sommant l'inégalité précédente, on trouve

$$\begin{aligned} h^0(X; nL - kM) &\geq h^0(X; nL - rM) - \sum_{j=0}^{q-1} [\langle LM \rangle bn - \langle M^2 \rangle b(bj + r) + 1] \\ &= \langle L^2 \rangle \frac{n^2}{2} - \langle LM \rangle nk + \langle M^2 \rangle \frac{k^2}{2} - O(n) \end{aligned}$$

(l'asymptotique  $h^0(X; nL - rM) = \langle L^2 \rangle n^2/2 + O(n)$  est fournie par Hirzebruch-Riemann-Roch). D'où le résultat.  $\square$

**Remarque :** La démonstration donne en fait une minoration de  $h^0(nL - kM) - h^1(nL - kM)$ .

**Corollaire 2.2 :** Soit  $X$  une surface projective sur  $K$ . Soient  $L$  un diviseur ample sur  $X$  et  $E$  un diviseur effectif ample sur  $X$ . On a alors

$$\nu(L; E) \geq \frac{\langle L^2 \rangle}{4\langle LE \rangle} + \frac{\langle L^2 \rangle^2 \langle E^2 \rangle}{24\langle LE \rangle^3} \quad .$$

*Démonstration :* On pose  $\alpha = \langle LE \rangle / \langle E^2 \rangle$  et  $\beta = \langle L^2 \rangle / \langle LE \rangle$ . Remarquons que  $\beta \leq \alpha$  par le théorème de l'indice de Hodge.

Grâce au lemme 2.1, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k \geq 1} h^0(X; nL - kE) &\geq \sum_{k=1}^{[\beta n/2]} \left( \langle L^2 \rangle \frac{n^2}{2} - \langle LE \rangle nk + \langle E^2 \rangle \frac{k^2}{2} \right) - O(n^2) \\ &= \left( \langle L^2 \rangle \frac{\beta}{4} - \langle LE \rangle \frac{\beta^2}{8} + \langle E^2 \rangle \frac{\beta^3}{48} \right) n^3 - O(n^2) \quad . \end{aligned}$$

D'où la minoration  $\nu(L; E) \geq \frac{\beta}{4} + \frac{\beta^2}{24\alpha}$ .  $\square$

Montrons maintenant le résultat principal de cette section :

**Proposition 2.3 :** Soit  $X$  une surface projective sur  $K$ . Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs amples sur  $X$ . Il existe alors des entiers  $m_1; \dots; m_r$  tels qu'en posant  $L = \sum_{i=1}^r m_i D_i$ , on ait  $m_i \geq 1$  et  $\nu(L; D_i) > \frac{r}{4} m_i$  pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ .

*Démonstration* : On pose  $\Delta = \{(t_1; \dots; t_r) \in \mathbb{R}_+^r \mid t_1 + \dots + t_r = 1\}$ . Pour tout  $t = (t_1; \dots; t_r) \in \Delta$ , on désigne par  $L_t$  le  $\mathbb{R}$ -diviseur  $L_t = \sum_{j=1}^r t_j D_j$  et on pose  $\phi(t) = \left( \sum_{i=1}^r \frac{1}{\langle L_t D_i \rangle} \right)^{-1}$ .

On note  $f : \Delta \rightarrow \Delta$  l'application continue définie par  $f(t) = \left( \frac{\phi(t)}{\langle L_t D_1 \rangle}; \dots; \frac{\phi(t)}{\langle L_t D_r \rangle} \right)$  pour tout  $t \in \Delta$ . D'après le théorème de Brouwer,  $f$  admet un point fixe  $x = (x_1; \dots; x_r)$ . On a alors  $\phi(x) = \langle L_x D_i \rangle x_i$  pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ , donc  $\phi(x)r = \langle L_x^2 \rangle$ .

On en déduit l'inégalité  $\frac{\langle L_x^2 \rangle}{\langle L_x D_i \rangle} + \frac{\langle L_x^2 \rangle^2 \langle D_i^2 \rangle}{6 \langle L_x D_i \rangle^3} > x_i r$  pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ .

On approche  $x$  par un  $y \in \mathbb{Q}_+^{*r} \cap \Delta$  de la forme  $y = \left( \frac{m_1}{m}; \dots; \frac{m_r}{m} \right)$  de telle sorte que l'inégalité précédente soit encore valable avec  $y$  au lieu de  $x$ , et on conclut en appliquant le corollaire 2.2.  $\square$

Terminons cette section par une définition :

**Définition** : Soit  $X$  une surface normale projective sur  $K$ . Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs non nuls sur  $X$ . On dit que  $D_1; \dots; D_r$  **se coupent proprement** lorsque : toute intersection de deux quelconques d'entre eux est finie, et toute intersection de trois quelconques d'entre eux est vide.

### 3 Arithmétique

Soient  $K$  un corps de nombres et  $S$  un ensemble fini de places de  $K$ . Pour tout  $v \in S$ , on désigne par  $K_v$  le complété de  $K$  en la place  $v$ . On note  $O_{K;S}$  l'anneau des  $S$ -entiers de  $K$ , *i.e.* l'ensemble des  $x \in K$  tels que  $|x|_v \leq 1$  pour toute place finie  $v \notin S$ .

**Définition** : Soit  $Y$  une variété sur  $K$ . Un ensemble  $\mathcal{E} \subset Y(K)$  est dit  **$S$ -entier** sur  $Y$  lorsqu'il existe un  $O_{K;S}$ -schéma intègre et quasi-projectif  $\mathcal{Y}$  de fibre générique  $Y$  tel que  $\mathcal{E} \subset \mathcal{Y}(O_{K;S})$ .

On va utiliser la version suivante du théorème du sous-espace de Schmidt et Schlickewei :

**Proposition 3.1** : Soient  $X$  une variété projective sur  $K$  et  $L$  un faisceau inversible très ample sur  $X$ . Soit  $h_L$  une hauteur de Weil relativement à  $L$ . Pour chaque  $v \in S$ , on munit  $L_v$  d'une métrique  $\| \cdot \|_v$  et on choisit une base  $(s_{1v}; \dots; s_{qv})$  de  $\Gamma(X; L)$ . Soient  $c \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ . Alors l'ensemble des points  $P \in X(K)$  vérifiant

$$-\sum_{v \in S} \sum_{k=1}^q \ln \|s_{kv}(P)\|_v \geq (q + \varepsilon) h_L(P) - c \quad (*)$$

*n'est pas Zariski-dense dans  $X$ .*

*Démonstration :* En posant  $V = \Gamma(X; L)$ , on a un plongement  $X \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ . On applique alors la reformulation de Vojta (cf théorème 2.2.4 de [11] p. 19) du théorème du sous-espace : il existe une réunion finie  $H$  de  $K$ -hyperplans de  $\mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}_K^{q-1}$  telle que tout point  $P \in X(K)$  vérifiant  $(*)$  est dans  $H \cap X$ .  $\square$

On montre ci-dessous une légère extension d'un résultat de Corvaja et Zannier (cf théorème principal de [1] p. 707-708) ; on s'inspire de leur méthode, tout en adoptant un point de vue plus géométrique :

**Théorème 3.2 :** *Soit  $X$  une surface normale projective sur  $K$ . Soient  $D_1; \dots; D_r$  des diviseurs effectifs non nuls sur  $X$  qui se coupent proprement. Posons  $Y = X - D_1 \cup \dots \cup D_r$ . Soient  $m_1; \dots; m_r$  des entiers  $\geq 1$ . On suppose que le diviseur  $L = \sum_{i=1}^r m_i D_i$  est ample sur  $X$  et que  $\nu(L; D_i) > m_i$  pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ . Soit  $\mathcal{E} \subset Y(K)$  un ensemble  $S$ -entier sur  $Y$ . Alors  $\mathcal{E}$  n'est pas Zariski-dense dans  $Y$ .*

*Démonstration :* On fixe un réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $\nu(L; D_i) > (1 + \varepsilon)m_i$  pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ , puis un entier  $b \geq 1$  tel que  $bL$  soit très ample et que

$$\sum_{k \geq 1} h^0(X; bL - kD_i) \geq (1 + \varepsilon)h^0(X; bL)m_i b \quad \text{pour tout } i \in \{1; \dots; r\}.$$

On note  $q = h^0(X; bL)$  et on choisit une hauteur de Weil  $h_{bL}$  relativement à  $bL$ . Pour tout diviseur effectif  $E$  sur  $X$ , on désigne par  $1_E$  la section globale de  $\mathcal{O}_X(E)$  qu'il définit.

Raisonnons par l'absurde en supposant  $\mathcal{E}$  Zariski-dense. Il existe alors une suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $\mathcal{E}$  qui est générique, *i.e.* telle que pour tout fermé  $Z \neq X$ , l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} \mid P_n \in Z\}$  est fini.

Quitte à extraire, on peut supposer (par compacité) que pour tout  $v \in S$ , la suite  $(P_{nv})_{n \geq 0}$  converge dans  $X(K_v)$  vers un  $y_v \in X(K_v)$ .

Soit  $v \in S$ . On munit chaque faisceau  $\mathcal{O}_X(D_i)_v$  d'une métrique  $\|\cdot\|_v$ . Les diviseurs  $D_1; \dots; D_r$  se coupent proprement, donc il existe deux indices  $j_v < l_v$  tels que  $y_v \notin D_i$  pour tout  $i \in \{1; \dots; r\} - \{j_v; l_v\}$ .

Le lemme 3.2 de [1] fournit une base  $\mathcal{B}_v = (s_{1v}; \dots; s_{qv})$  de  $\Gamma(X; bL)$  adaptée aux filtrations  $\left(\Gamma(X; bL - kD_{j_v})\right)_{k \geq 0}$  et  $\left(\Gamma(X; bL - kD_{l_v})\right)_{k \geq 0}$ , *i.e.*  $\mathcal{B}_v$  contient une base de  $\Gamma(X; bL - kD_i)$  pour tout  $i \in \{j_v; l_v\}$  et tout  $k \geq 0$ .

Fait : On a la minoration suivante pour tout  $n \geq 0$  :

$$-\sum_{k=1}^q \ln \|s_{kv}(P_n)\|_v \geq -(q + q\varepsilon) \ln \|1_{bL}(P_n)\|_v - O(1) \quad , \quad (1)$$

où le  $O(1)$  est indépendant de  $n$ .

Prouvons ce fait. Soit  $s \in \Gamma(X; bL) - \{0\}$ . Pour tout  $i \in \{1; \dots; r\}$ , notons  $\mu_i(s)$  le plus grand entier  $\mu$  tel que le diviseur  $\text{div}(s) - \mu D_i$  soit effectif. Puisque les fermés  $D_{j_v}$  et  $D_{l_v}$  n'ont pas de composante commune, le diviseur  $\text{div}(s) - \mu_{j_v}(s)D_{j_v} - \mu_{l_v}(s)D_{l_v}$  est encore effectif. Ceci implique l'inégalité

$$-\ln \|s(P_n)\|_v \geq -\mu_{j_v}(s) \ln \|1_{D_{j_v}}(P_n)\|_v - \mu_{l_v}(s) \ln \|1_{D_{l_v}}(P_n)\|_v - O(1) \quad .$$

On écrit cette inégalité pour  $s = s_{kv}$ , puis on somme sur  $k$ . En observant que pour  $i \in \{j_v; l_v\}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^q \mu_i(s_{kv}) &= \sum_{\mu \geq 0} \left[ h^0(X; bL - \mu D_i) - h^0(X; bL - (\mu + 1)D_i) \right] \mu \\ &= \sum_{\mu \geq 1} h^0(X; bL - \mu D_i) \geq (q + q\varepsilon) m_i b \quad , \end{aligned}$$

on trouve alors

$$-\sum_{k=1}^q \ln \|s_{kv}(P_n)\|_v \geq -(q + q\varepsilon)b \left[ m_{j_v} \ln \|1_{D_{j_v}}(P_n)\|_v + m_{l_v} \ln \|1_{D_{l_v}}(P_n)\|_v \right] - O(1) \quad .$$

Le fait énoncé s'en déduit en remarquant que  $\ln \|1_{D_i}(P_n)\|_v = O(1)$  pour tout  $i \in \{1; \dots; r\} - \{j_v; l_v\}$ .

Maintenant, l'ensemble  $\mathcal{E}$  est  $S$ -entier sur  $Y$ , donc pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$h_{bL}(P_n) = - \sum_{v \in S} \ln \|1_{bL}(P_n)\|_v + O(1) \quad .$$

En utilisant la minoration (1), on obtient (pour tout  $n \geq 0$ )

$$-\sum_{v \in S} \sum_{k=1}^q \ln \|s_{kv}(P_n)\|_v \geq (q + q\varepsilon) h_{bL}(P_n) - O(1) \quad .$$

D'où une contradiction avec la proposition 3.1 (*i.e.* le théorème du sous-espace).  $\square$

*Démonstration du théorème 1.1* : Il suffit d'appliquer la proposition 2.3 (avec  $r = 4$ ) puis le théorème 3.2.  $\square$

## Références

- [1] *P. Corvaja, U. Zannier* : On integral points on surfaces. *Annals of Math.* **160** (2004), 705-726.
- [2] *J.P. Demailly* :  $L^2$  vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory. *Lecture Notes in Math.* **1646** (1996), 1-97.
- [3] *G. Faltings* : Diophantine approximation on abelian varieties. *Annals of Math.* **133** (1991), 549-576.

- [4] *W. Fulton* : Algebraic curves. W.A. Benjamin, Inc. (1969).
- [5] *W. Fulton* : Intersection theory (second edition). Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete **2** (1998).
- [6] *S. Lang* : Number theory III. Encyclopaedia of Math. Sciences **60** (1991).
- [7] *R. Lazarsfeld* : Positivity in algebraic geometry I. Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete **48** (2004).
- [8] *H.P. Schlickewei* : The  $p$ -adic Thue-Siegel-Roth-Schmidt theorem. Archiv der Math. **29** (1977), 267-270.
- [9] *W.M. Schmidt* : Diophantine approximation. Lecture Notes in Math. **785** (1980).
- [10] *J.P. Serre* : Lectures on the Mordell-Weil theorem (third edition). Aspects of Math. **15** (1997).
- [11] *P. Vojta* : Diophantine approximations and value distribution theory. Lecture Notes in Math. **1239** (1987).
- [12] *P. Vojta* : Integral points on subvarieties of semiabelian varieties I. Inventiones Math. **126** (1996), 133-181.

Pascal Autissier. I.R.M.A.R., Université de Rennes I, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France.

pascal.autissier@univ-rennes1.fr